# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2012

## MATHÉMATIQUES

Série : **ES**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures.** – COEFFICIENT : **7**



***Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7.***

*Ce sujet nécessite l'utilisation d'une feuille de papier millimétré.*

*L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.*

*Le candidat doit traiter tous les exercices.*
*Il est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

**Exercice 1** *(5 points)*

**Commun à tous les candidats**

On donne le prix moyen en euros d'un litre de gasoil en France, entre 1998 et 2007:

| Année | 1998 | 1999 | 2000 | 2001 | 2002 | 2003 | 2004 | 2005 | 2006 | 2007 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Rang $x_i$ de l'année | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Prix moyen $y_i$ du litre de gasoil (en euros) | 0,77 | 0,81 | 0,73 | 0,79 | 0,8 | 0,85 | 0,99 | 1,06 | 1,1 | 1,11 |

Source : *Annuaire Statistique de la France*

**1)** Calculer le pourcentage d'évolution, arrondi à 1% près, du prix moyen d'un litre de gasoil en euros entre 1998 et 2007.

**2)** **a)** Représenter le nuage de points $M_i\left(x_i; y_i\right)$, avec *i* compris entre 0 et 9, associé à cette série statistique, dans le plan rapporté à un repère orthogonal.
On choisira les unités graphiques suivantes :
1cm pour 1 année sur l'axe des abscisses
1 cm pour 10 centimes d'euro sur l'axe des ordonnées.

**b)** Calculer les coordonnées du point moyen G de cette série et le placer dans le repère précédent.

**3)** On modélise l'évolution du prix moyen d'un litre de gasoil en euros à l'aide d'un ajustement affine, obtenu par la méthode des moindres carrés.
Donner l'équation de la droite de régression de $y$ en $x$ ainsi obtenue, en arrondissant les coefficients au millième. Tracer cette droite dans le repère défini à la question **2)**.

**4)** Avec ce modèle, calculer l'estimation du prix moyen d'un litre de gasoil en euros en 2010. Arrondir le résultat au centime d'euro.

**5)** *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

En supposant que le modèle reste valable durablement, à partir de quelle année le prix moyen du litre de gasoil aura-t-il augmenté de 30% par rapport au prix moyen de l'année 2007 ?

**Exercice 2** *(5 points)*

**Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.**

Dans une grande entreprise, tous les agents commerciaux ont une voiture de fonction, qu'ils doivent choisir entre deux marques A et B. Le parc de véhicules (en location) est renouvelé tous les ans.

On suppose que le nombre d'agents commerciaux de l'entreprise ne varie pas, et que les deux marques A et B restent les seules possibilités pour les voitures de fonction proposées dans l'entreprise.

On a constaté que, chaque année :

- 5% des agents commerciaux utilisant un véhicule de marque A changent l'année suivante pour B ;
- 15% des agents commerciaux utilisant un véhicule de marque B changent l'année suivante pour A ;
- les autres agents poursuivent l'année suivante avec un véhicule de même marque.

On appelle $a_n$ la probabilité qu'un agent commercial choisi au hasard utilise un véhicule de marque A au début de l'année 2010 + $n$, et $b_n$ la probabilité qu'il utilise un véhicule de marque B au début de cette même année.

On note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice correspondant à l'état probabiliste de l'année 2010 + $n$.

En 2010, la moitié des agents commerciaux possédaient un véhicule de marque A ; ainsi : $P_0 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$.

1) Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B, et donner la matrice de transition $M$ (on considèrera les sommets du graphe dans l'ordre alphabétique).
2) Justifier que $P_1 = \begin{pmatrix} 0,55 & 0,45 \end{pmatrix}$ et donner une interprétation concrète des coefficients de cette matrice.
3) Déterminer l'état probabiliste stable du système et interpréter les résultats obtenus.
4) a) Que vaut, pour tout entier naturel $n$, la somme $a_n + b_n$ ?

   b) On sait, pour tout entier naturel $n$ , que: $P_{n+1} = P_n \times M$ ; démontrer, pour tout entier naturel $n$ , que: $a_{n+1} = 0,8a_n + 0,15$.
5) Pour tout entier naturel $n$, on pose : $u_n = a_n - 0,75$.

   a) Démontrer que la suite $(u_n)$ est une suite géométrique de raison 0,8 dont on précisera le premier terme.

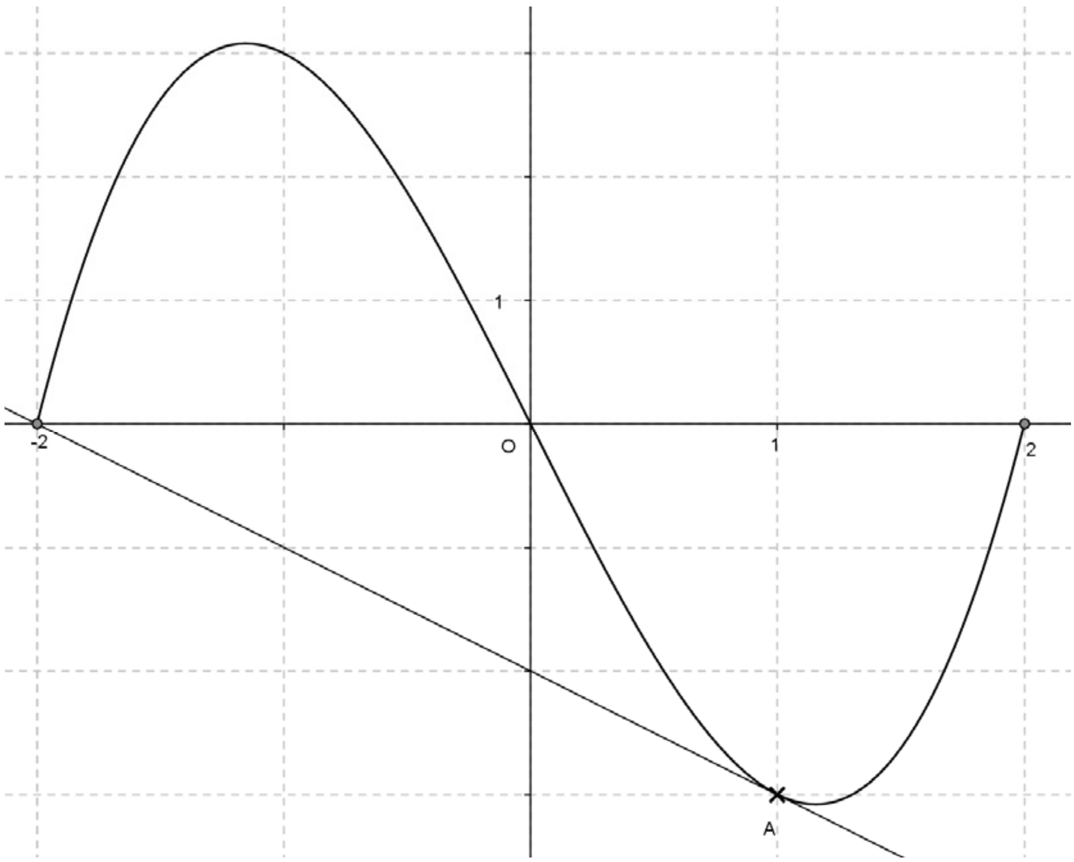
   b) Exprimer $u_n$ en fonction de $n$ puis démontrer que pour tout entier naturel $n$,
   $$a_n = -0,25 \times 0,8^n + 0,75.$$

   c) Déterminer la limite de la suite $(a_n)$. Quel résultat retrouve-t-on ainsi ?

**Exercice 3** *(4 points)*

**Commun à tous les candidats**

On donne la courbe représentative d'une fonction $f$ définie et dérivable sur l'intervalle $[-2;2]$, et sa tangente en son point A d'abscisse 1 ; cette tangente passe par le point de coordonnées $(0\,;-2)$. On note $f'$ la fonction dérivée de $f$ sur l'intervalle $[-2;2]$.




Pour chacune des questions suivantes, une seule réponse est exacte ; préciser laquelle sur la copie. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

**1)** Le nombre dérivé note $f'(1)$ est égal à :

**a)** 1 **b)** $-\dfrac{1}{3}$ **c)** $-1$ **d)** 3.

**2)** La fonction $u$ telle que $u(x) = \ln[f(x)]$ est définie sur :

**a)** $[-2;0]$ **b)** $]-2;0[$ **c)** $]0;2[$ **d)** $[0;2]$.

**3)** On considère $F$ une primitive de $f$ sur l'intervalle $[-2;2]$.

La fonction $F$ est décroissante sur :

**a)** $[-2;0]$ **b)** $[-2;2]$ **c)** $[0;2]$ **d)** $[-1;1]$ .

**4)** Soit $I = \int_{-1}^{0} f(x)dx$. On a :

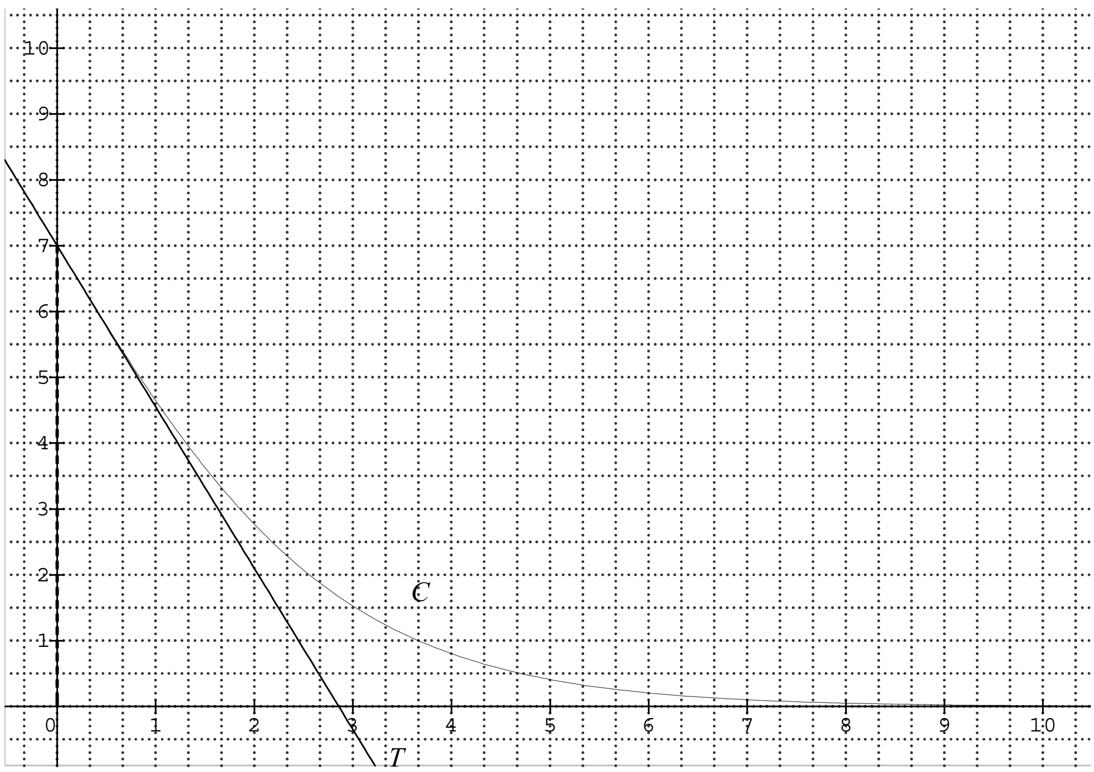
**a)** $I < 0$ **b)** $0 \leq I \leq 1$

**c)** $1 < I < 3$ **d)** $I \geq 3$

## <u>Exercice 4 :</u> *(6 points)*

**Commun à tous les candidats**

On a représenté ci-dessous la courbe $C$ d'une fonction $g$ définie et dérivable sur $[0;+\infty[$ ainsi que la tangente $T$ à cette courbe en son point de coordonnées (0 ; 7). On admet que l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe $C$ au voisinage de $+\infty$. On désigne par $g'$ la fonction dérivée de la fonction $g$.




### Partie A

**1)** Préciser la valeur du réel $g(0)$.

**2)** On admet que la tangente $T$ passe par le point de coordonnées $(4\,;-2,8)$. Justifier que la valeur exacte de $g'(0)$ est $-2,45$ .

**3)** Préciser la valeur de la limite de la fonction $g$ en $+\infty$.

**4)** On admet que la fonction $g$ est définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$$g(x)=\frac{a}{e^{bx}+1}$$

où $a$ et $b$ sont des nombres réels.

**a)** Démontrer que pour tout réel $x$ de $[0;+\infty[$, on a : $g'(x)=\dfrac{-abe^{bx}}{(e^{bx}+1)^2}$.

**b)** En utilisant les résultats des questions 1) et 2), déterminer les valeurs des réels $a$ et $b$.

## Partie B

On considère un objet manufacturé dont le prix unitaire est $x$, en centaines d'euros.

D'après une étude de marché, l'offre $f(x)$ et la demande $g(x)$ pour cet objet, en centaines d'unités, sont définies pour tout $x$ positif ou nul par :

$$f(x)=e^{0,7x}-1 \text{ et } g(x)=\frac{14}{e^{0,7x}+1}.$$

**1)** Si le prix de vente unitaire de l'objet est 300 €, combien d'objets (à l'unité près) les consommateurs sont-ils prêts à acheter ?

**2)** Calculer le prix de vente unitaire de l'objet, arrondi à l'euro près, pour que la demande soit de 350 objets.

**3)** **a)** Déterminer l'unique solution de l'équation $f(x)=g(x)$, et donner une valeur approchée au centième de cette solution. On appelle « prix d'équilibre » le prix permettant l'égalité entre l'offre et la demande. Quel est le prix d'équilibre, arrondi à l'euro près ?

**b)** Au prix d'équilibre, quelle est la valeur commune de l'offre et de la demande, arrondie à l'unité près ? Quel est le chiffre d'affaire généré par les ventes au prix d'équilibre ?